数理解析研究所講究録 1317 巻 2003 年 114-124

関孝和の翦管術

聖心女子学院高等科　田辺 寿美枝 （Sumie Tanabe）
Sacred Heart Senior High School

§1．はじめに

江戸時代の数学者 関孝和（1640？～1708）の『括要算法』は関自身が1680年～1683年に書いたものをもとに、関の没後の1712年、関流の門弟、荒木村英、大高由昌によって編集、出版されたものである。（注１） この『括要算法』は、元（げん）、亨（こう）、利（り）、貞（てい）の４巻からなっており、４巻それぞれの内容は、元巻（第１巻）は累裁招差法、垜積（だせき）総術など、亨巻（第２巻）は 諸約術(互約、逐約、他)剰一術、翦管術、利巻（第３巻）は角術、そして貞巻（第４巻）は求円周率、求弧術、求立円周積術、即ち円理となっている。
本著は亨巻で述べられている「翦管術（せんかんじゅつ）」を現代の数学の式を用いて表し解説し、合わせて中国のいくつかの算書から関の「翦管術」への流れを探り、関が「翦管術」を考えていた当時の数学的背景についての考察を深め、特に秦九韶の「大衍総数術」との照応について検証することを目的としている。

§2．翦管術とその流れ

「翦管術」とは、連立１次合同式「$x \equiv r_1 \pmod{m_1}$，…，$x \equiv r_n \pmod{m_n}$」(以下、剰余方程式と呼ぶ)の解法のことであり、現在「中国剰余定理」、又或いは中国では「孫子定理」と呼ばれているものである。「翦管術」という名称は、中国、南宋の『楊輝算法』（1274～1275年，楊輝）の中の「續古摘奇算法」(1275年)が始まりとされ、この中には「翦管術」の名で剰余方程式５題が紹介されている。ただし、中国の算書における剰余方程式の問題としては古くは『孫子算経』(400年頃，著者不詳)の中で「物不知其総数」として１題あるのに始まり、『数書九章』(1247年，秦九韶)の中では「大衍総数術」として９題、次いで上述の『楊輝算法』の５題、さらに時代を下って、『算法統宗』(1592年，程大位)にも３題収められている。もともと、中国では暦学上の必要により早くから剰余方程式の解法が確立し、伝えられたものと思われる。そして、その時代や地域によって剰余方程式及びその解法は「物不知其総数」「大衍総数術」「翦管術」さらには「秦王暗點兵」「韓信點兵」「鬼谷算」など様々に呼ばれてきたものであった。

ただ、このような古くからの多くの研究成果の中で算書という形で現在に伝えられているものは一部であり、更にその中で日本まで伝来し、和算の「翦管術」に影響があったことが確認されているものは、『楊輝算法』と『算法統宗』のみであるとされている。実際に『楊輝算法』は1673年又は1661年に関本人が写本した(注２)とされるものの写しが残っており、又『算法統宗』は『括要算法』の中にその名を明記し、引用されている。従って、関をはじめ当時の和算家達がこの２冊の算書を学習し、少なからず示唆を受けていたことは確かであろう。

以下、整数a、bに対して、(a, b)はaとbの最大公約数を、{a, b}はaとbの最小公倍数を表すものとする。

剰余方程式「$x \equiv r_1 \pmod{m_1}$、$x \equiv r_2 \pmod{m_2}$、…、$x \equiv r_n \pmod{m_n}$

但し、$i \neq j$で$(m_i, m_j)=1$」…(1)

についての中国の算書に伝わる解法を以下に述べる。

$i=1, 2, \cdots, n$に対し「$x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$、$x_i \equiv 0 \pmod{m_j}$ $(i \neq j)$」……(2)

となるx_iを求めた後、$x \equiv \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \pmod{M}$(但し、$M=m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$)を満たす最小の正の整数$x$を答とするものである。各々の$i$に対して(2)を満たす$x_i$は、

不定方程式「$\frac{M}{m_i}x - m_i y = 1$」を解き、$\frac{M}{m_i}x$を$x_i$とすることによって求めている。

又この不定方程式の解法を、『数書九章』においては「大衍求一術」、関の『括要算法』では「剰一術」と呼んでいる。

『楊輝算法』の「翦管術」の第1問は『孫子算経』の中で1題だけ紹介されているものと全く同じ問題であり、原文は以下のものである。

「物不知総数只云三三数之剰二、五五数之剰三、七七数之剰二、問本総数幾何。

答日二十三」 以下術文が続く。この問題文を合同式で表せば、

「$x \equiv 2 \pmod{3}$, $x \equiv 3 \pmod{5}$, $x \equiv 2 \pmod{7}$」を満たすxを求めることであり、$x=23$を答としている。 $x \equiv 23 \pmod{105}$とは答えていない。

又『算法統宗』には同じ問題が

孫子歌 「三人同行七十稀 五樹梅花甘一枝

七子團圓正半月 除百令五便得知」 と共に紹介されている。

この七言絶句は、剰余方程式(1)で、「$n=3$、$m_1=3$、$m_2=5$、$m_3=7$」の場合には、(2)を満たすx_i($i=1, 2, 3$)それぞれは、$x_1=70$、$x_2=21$、$x_3=15$(半月)、$m_1 \times m_2 \times m_3=105$となることを覚えやすく歌に込めたものである。従って、この場合の剰余方程式の答は、合同式「$x \equiv 70r_1+21r_2+15r_3 \pmod{105}$」を満たす最小の正の整数であり、$70r_1+21r_2+15r_3$から105を引けるだけ引いた余りを答えればよいとしている。ここで最後に引く数が105であることから、このような剰余方程式及びその解法は「百五減算」とも呼ばれていた。

『孫子算経』、『数書九章』、『楊輝算法』、『算法統宗』に伝わる剰余方程式の解法について以下の3点を留意しておきたい。

1. 与えられた条件を満たす正の最小数のみを答としており、不定方程式の一般解を答えるという意識は窺えない。
2. 問題の解法の中で、x_i ($i=1, 2, \cdots, n$)を求める方法についての説明があるのは、『数書九章』だけである。
3. 『数書九章』以外の算書では、すべての問題は「$i \neq j$で$(m_i, m_j)=1$」であることを前提としている。

§3．関孝和の「諸約の法」、「剰一術」

関孝和は「括要算法」亨巻の中で、まず前編において「諸約の法」として、互約、逐約、斉約、遍約、増約、損約、零約、遍通、剰一の諸約術（公約数、公倍数、不定方程式など）について述べ、続く後編「翦管術解」において前編の約術を道具立てとして、9題の剰余方程式及びその解法「術」を示している。

前編「諸約の法」で述べられいる約術のうち「翦管術」につながるものを以下に解説する。

・互約　…　2つの自然数、a、bの最小公倍数を変えずに、互いに素であるa′、b′に約すこと。即ち、2つの自然数a、bに対して、
$(a', b')=1$、　$a' \times b' = \{a, b\}$　となるa′、b′に約すこと。
〔例〕　6と8を互約すると3と8に、36と48を互約すると9と16になる。
30と54を互約すると5と54、或いは、10と27と2通りの互約が可能。
従って、互約の結果は必ずしも一通りではない。

・逐約　…　3つ以上の自然数について互約と同様に約すこと。
〔例〕　105、112、126を逐約すると、5、16、63としている。

・斉約　…　いくつかの自然数の最小公倍数を求めること。

・遍約　…　いくつかの自然数をそれらの最大公約数で約すこと。
〔例〕8、10を遍約すると4、5になる。12、30、39は、4、10、13となる。

・等数　…　特に原文中に用語としての説明はないが、最大公約数を「等数」と呼び、諸約術の解説の中で使っている。2つの自然数の「等数」は互いに減じることを繰り返せば求まるとしている。

・増約、損約、零約、遍通の各約術は翦管術に直接利用されているものではないので、本稿では割愛する。

・剰一　…　剰一とは「一を剰（あま）す」という意味で、1次不定方程式（Diophantus方程式）
「$Ax-By=1$（ただし、A、Bは自然数の定数で、$(A, B)=1$、$A<B$）」
の自然数解を求める「術」方法のことである。　「剰一」の第1問は、
「今有以左十九累加之得数、以右二十七累減之、剰一、問左総数幾何。答曰左総数百九十」
とある。これを読み下すと
「今　左19を累（かさ）ね加えて得た数がある。この数から右27を累（かさ）ね減じて一を剰（あま）す、左総数は幾何か。答は左総数190」となる。　これは、不定方程式「$19x-27y=1$」に於いて、$19x$（左総数）がいくつかと問う問題で、答を「左総数$19x=190$」としているものである。
又、累ね加えた回数x、減ずる回数yそれぞれを左段数、右段数と呼んでいる。
この問に続く「術曰」と始まる「術文」では、以下のような解法を述べている。

$\overset{\text{右数}}{27}\div\overset{\text{左数}}{19}=1\cdots8$　の計算を「甲」と名付け、その商1を甲商、余り8を甲不尽とする。

$\overset{\text{左数}}{19}\div\overset{\text{甲不尽}}{8}=2\cdots3$　の計算を「乙」と名付け、その商2を乙商、余り3を乙不尽とする。

以下、(甲不尽)÷(乙不尽)を「丙」、(乙不尽)÷(丙不尽)を「丁」と名付け計算を進める。はじめの計算「甲」を右側とし、次の計算「乙」を左側、以下次々交互に右、左と考えて計算を続け、左側で余り1となった「丁」で計算を止める。この計算を表にすると以下のようになる。

左 19	右 27	
	27÷19＝1…8 （甲）	→ 甲商 1、甲不尽 8
19÷8＝2…3 （乙）		→ 乙商 2、乙不尽 3
	8÷3＝2…2 （丙）	→ 丙商 2、丙不尽 2
3÷2＝1…1 （丁）		→ 丁商 1、丁不尽 1

更に、「子 ＝ 甲商×乙商＋1＝3」、「丑 ＝ 子×丙商＋甲商＝7」とおくと、
「左段数 x＝ 丑×丁商＋子＝10」……(3) と求まり、従って「左総数 19x＝190」が求める答であるとしている。
「術文」の中の(3)式に到る過程について若干補足しておく。甲、乙、丙、丁4回の計算それぞれから

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overset{8}{\text{甲不尽}} & = & \overset{27}{\text{右数}} - \overset{19}{\text{左数}} \times \overset{1}{\text{甲商}} \\ \overset{3}{\text{乙不尽}} & = & \overset{19}{\text{左数}} - \overset{8}{\text{甲不尽}} \times \overset{2}{\text{乙商}} \\ \overset{2}{\text{丙不尽}} & = & \overset{8}{\text{甲不尽}} - \overset{3}{\text{乙不尽}} \times \overset{2}{\text{丙商}} \\ \overset{1}{\text{丁不尽}} & = & \overset{3}{\text{乙不尽}} - \overset{2}{\text{丙不尽}} \times \overset{1}{\text{丁商}} \end{array}\right.$$

以上4つの関係式が得られ、これらの式を順次代入し、丁不尽を表せば

$$\overset{1}{\text{丁不尽}} = \overset{19}{\text{左数}} \times (\underbrace{\overset{7}{\text{丑}} \times \overset{1}{\text{丁商}} + \overset{3}{\text{子}}}_{\text{左段数}\,x}) - \overset{27}{\text{右数}} \times \{\underbrace{\overset{2}{\text{乙商}} + (1 + \overset{2}{\text{乙商}} \times \overset{2}{\text{丙商}}) \times \overset{1}{\text{丁商}}}_{\text{右段数}\,y}\}$$

となることから、「左段数 x ＝丑×丁商＋子」 即ち、(3)式が得られる。
ここで、「関の剰一術」を一般化して考えると、
「不定方程式 $Ax - By = 1$ （A、Bは自然数の定数、(A, B)＝1、A＜B)」に於いて

$$B \div A = q_1 \cdots r_1$$
$$A \div r_1 = q_2 \cdots r_2$$

以下n回目の計算を $r_{n-2} \div r_{n-1} = q_n \cdots r_n$ とする。
奇数回目の計算を右、偶数回目の計算を左とし、右、左と順次計算を進め、
左(偶数回目)の計算の余りが1になったところでこの計算を止める。 最後の余り1を、A、B及びq_1、……q_nを用いて表すことによって、「左総数Ax」を答えている。

関が「剰一」と呼んだ、この術の本質は「ユークリッドの互除法」そのものである。但し、「関孝和の剰一術」と「ユークリッドの互除法による今日の不定方程式の解法」には、大きな相違点がある。それは、「剰一術」ではあくまでも「最小の正の整数解を求めることを目的としている」ということであり、このことは当時の和算の世界には

1. 「一般解を答える」という意識がなかったこと
2. 負の数の概念が全くなかった訳ではないが、限定的な認識に留まり、少なくとも答の対象としての「負の数」を認識するに至っていなかったこと

以上、2点を示しているものである。
たとえば、前述の「百五減算」という「剰余方程式」の呼び方は、ある意味で一般解を視野に収めているものと云えるが、「一般解で答える」という意識には至っていない。暦をはじめとした現実的な問題解決の手段として発達した中国数学の流れを受けた和算の世界では一般解を求める必要がなかったこと、更に数式の表記法、notationが確立していなかったことが本質的な限界となっていたものと推察される。

術文に「左止め」とあり、右側で余り1になった場合には、もう1回計算を進め、必ず左側の余り1で止める。このように左右に拘泥するのも答が負の数になることを避けるために編み出された手続きといえる。

「剰一」の第2問は、左数A＝179、右数B＝74、即ち、「$179x-74y=1$」を解く問題である。まず、A＞BなのでA÷Bの余り31を左数と置き換えてから計算を始め、以下の表のように進めている。

左　179→31	右　74
	74÷31＝2 …12　(甲)
31÷12＝2 … 7　(乙)	
	12÷7＝1 …5　(丙)
7÷5＝1 … 2　(丁)	
	5÷2＝2 …1　(戊)
2÷1＝1 … 1　(己)	

A＝179 →A＝31、B＝74
$q_1=2$、$r_1=12$
$q_2=2$、$r_2=7$
$q_3=1$、$r_3=5$
$q_4=1$、$r_4=2$
$q_5=2$、$r_5=1$
$q_6=1$、$r_6=1$

戊のところで余り1となっているが、止めずにもう1回計算を続け、己の余り1、即ち、左側で計算を止める。先に述べたとおり、答が負の数となるのを避けるための手続きである。以下第1問と同様に子、丑、寅、卯、辰と順次計算式に名前をつけ、代入計算を繰り返し、「左総数179×x＝7697(x＝43、y＝104)」を答としている。答に至る計算の流れは正に「ユークリッドの互除法」と同様である。

§4. 関孝和の「翦管術」

関孝和の『括要算法』亨巻の後編には『楊輝算法』の中の「翦管術」という名前を援用して、剰余方程式9題が収録されている。

① $\begin{cases} x\equiv 1 & (\mathrm{mod}\ 5) \\ x\equiv 2 & (\mathrm{mod}\ 7) \end{cases}$　答 $x=16$

*② $\begin{cases} x\equiv 2 & (\mathrm{mod}\ 36) \\ x\equiv 14 & (\mathrm{mod}\ 48) \end{cases}$　答 $x=110$

③ $\begin{cases} x\equiv 2 & (\mathrm{mod}\ 3) \\ x\equiv 1 & (\mathrm{mod}\ 5) \\ x\equiv 5 & (\mathrm{mod}\ 7) \end{cases}$　答 $x=26$

*④ $\begin{cases} x\equiv 3 & (\mathrm{mod}\ 6) \\ x\equiv 3 & (\mathrm{mod}\ 8) \\ x\equiv 5 & (\mathrm{mod}\ 10) \end{cases}$　答 $x=75$

⑤ $\begin{cases} x\equiv 3 & (\mathrm{mod}\ 5) \\ x\equiv 2 & (\mathrm{mod}\ 7) \\ x\equiv 2 & (\mathrm{mod}\ 9) \\ x\equiv 7 & (\mathrm{mod}\ 11) \end{cases}$　答 $x=128$

*⑥ $\begin{cases} 35x\equiv 35 & (\mathrm{mod}\ 42) \\ 44x\equiv 28 & (\mathrm{mod}\ 32) \\ 45x\equiv 35 & (\mathrm{mod}\ 50) \end{cases}$　答 $x=13$

⑦ $\begin{cases} 8x\equiv 2 & (\mathrm{mod}\ 3) \\ 7x\equiv 3 & (\mathrm{mod}\ 4) \\ 6x\equiv 3 & (\mathrm{mod}\ 5) \end{cases}$　答 $x=13$

*⑧ $\begin{cases} 34x\equiv 6 & (\mathrm{mod}\ 8) \\ 34x\equiv 14 & (\mathrm{mod}\ 20) \\ 34x\equiv 23 & (\mathrm{mod}\ 27) \end{cases}$　答 $x=11$

⑨ $\begin{cases} 13x\equiv 3 & (\mathrm{mod}\ 7) \\ 13x\equiv 8 & (\mathrm{mod}\ 9) \end{cases}$　答 $x=11$

関はそれぞれに特色のある9題の問題を作って取り上げている。しかも②、④、⑥、⑧と*印をつけた偶数番の問題すべては法 modulus が互いに素でない問題となっている。

第1問、剰余方程式「$x\equiv 1\pmod{5}$、$x\equiv 2\pmod{7}$」の原文は
「今有物、不知総数、只云、五除余一箇、七除余二箇、問総数幾何。答曰総数一拾六箇」
とある。§2.の(1)式の表記を用いれば「$n=2$、$m_1=5$、$r_1=1$、$m_2=7$、$r_2=2$」
であり、問と答に続く「術文」では「$\overset{1}{r_1}\times\overset{21}{x_1}+\overset{2}{r_2}\times\overset{15}{x_2}=51$、　$51-m_1\overset{35}{\times}m_2=16$」
という計算式を述べ、16が答であるとしている。

ここで関は、$x_1=21$(5で割ると1余り、7で割り切れる数)を「五除法」、$x_2=15$(7で割ると1余り、5で割り切れる数)を「七除法」、$m_1\times m_2=35$を「去法」と呼び、一般に§2.の(1)式のx_iを「m_i除法」、最小公倍数$\{m_1, m_2, \cdots, m_n\}$を「去法」と名付けている。
「術文」に続く「解文」では五除法$x_1=21$、七除法$x_2=15$の求め方が述べられている。
即ち、「剰一術」によって

不定方程式「$7x-5y=1$」から「左総数 $7x=21$」を得、これを五除法x_1とし、
不定方程式「$5x-7y=1$」から「左総数 $5x=15$」を得、これを七除法x_2とし、
更に $m_1\times m_2=35$ が去法$\{m_1, m_2\}$であるとしている。

このように定めれば、

五除法x_1は、「$x_1\equiv 1\pmod{5}$、$x_1\equiv 0\pmod{7}$」を
七除法x_2は、「$x_2\equiv 0\pmod{5}$、$x_2\equiv 1\pmod{7}$」を満たしている。

従って、合同式「$x\equiv\overset{1}{r_1}\times\overset{21}{x_1}+\overset{2}{r_2}\times\overset{15}{x_2}\pmod{35}$」による数$x$は
「$x\equiv r_1\pmod{5}$、$x\equiv r_2\pmod{7}$」を満たしていることになる。
そこで、このxの中の「正の最小数16」を答としている。
ここで関が示している解法は、『孫子算経』を始め古く中国で確立された中国剰余定理による典型的な解法であるといえる。

第2問、剰余方程式「$x\equiv 2\pmod{36}$、$x\equiv 14\pmod{48}$」は、§2.の(1)式の記号を用いれば、「$n=2$、$m_1=36$、$r_1=2$、$m_2=48$、$r_2=14$」である。
ここで注目すべきは点は「$(\overset{36}{m_1}、\overset{48}{m_2})\neq 1$」となっていることである。
「術文」は、計算式「$\overset{2}{r_1}\times\overset{64}{x_1}+\overset{14}{r_2}\times\overset{81}{x_2}=1262$」を述べた後、去法$\{m_1、m_2\}=144$を1262から引けるだけ引いた余り 110 を答としている。
続く「解文」では、36除法$\overset{64}{x_1}$と48除法$\overset{81}{x_2}$、去$\overset{144}{\text{法}}$それぞれの求め方を述べている。
即ち、まず、$\overset{36}{m_1}$と$\overset{48}{m_2}$は、$(m_1, m_2)\neq 1$なので「互約術」を使い、$m'_1=9$、$m'_2=16$と置き換えて$(m'_1, m'_2)=1$としてから、「剰一術」を用いている。
不定方程式「$16x-9y=1$」から「左総数$16x=64$」を得、これを36除法(x_1)とし、
不定方程式「$9x-16y=1$」から「左総数$9x=81$」を得、これを48除法(x_2)とし、
更に、$m'_1\times m'_2=144$を去法としている。このように定めれば「剰一術」の性質から、
「$x_1\equiv 1\pmod{9}$、$x_1\equiv 0\pmod{16}$」、「$x_2\equiv 0\pmod{9}$、$x_2\equiv 1\pmod{16}$」
であり、又互約の性質から、$m'_1\times m'_2=\{m_1、m_2\}$　となっていることがわかるので
「$x\equiv\overset{2}{r_1}\times\overset{64}{r_1}+\overset{14}{r_2}\times\overset{81}{x_2}\pmod{\overset{144}{m'_1\times m'_2}}$」となる$x$の中の正の最小数は、1262から144を引けるだけ引いた余り、110と求められる。

一方、関が「剰一」と呼んでいる不定方程式「$m_1x-m_2y=1$」が解(x, y)を持つためには、$(m_1, m_2)=1$ であることが必要十分条件である。(注３)

関はこのことをよく承知した上で、敢えてm_1、m_2が互いに素でない場合を取り上げ、まずm_1、m_2を互約し、互いに素である２数m'_1、m'_2 に置き換えてから「剰一」を使えば良いとしていると思われる。

しかし、例えば$(m_1, m_2)\neq 1$であるm_1、m_2を互約してm'_1、m'_2 に置き換えた後に「剰一」を使った場合、

その時の剰余方程式 「$x\equiv r_1 \pmod{m'_1}$、$x\equiv r_2 \pmod{m'_2}$」 ……(４)$'$ が、

もとの剰余方程式 「$x\equiv r_1 \pmod{m_1}$、$x\equiv r_2 \pmod{m_2}$」 ……(４)と同値

であるとは一般には云えない。剰余方程式(４)$'$が(４)と同値であるための必要十分条件は、 「$r_1-r_2\equiv 0 \pmod{(m_1、m_2)}$」 …………(５)である。

従って 「$x\equiv r_1 \pmod{m_1}$、$x\equiv r_2 \pmod{m_2}$」が解を持つための必要十分条件も条件(５)である。

関が作った法 modulus が互いに素でない問題４題(§４.の*印)はすべてこの条件(５)を満たしている。この種の剰余方程式は、中国の算書では『数書九章』(1247)に詳しい解法と共に紹介されているのが始まりであり、『孫子算経』(400年頃)、『楊輝算法』(1275)、『算法統宗』(1592)などには１題も収められていないものである。

§５．関の「翦管術」と『数書九章』の「大衍総数術」

秦九韶の『数書九章』(1247)は全18巻からなり、その冒頭の第１巻、第２巻「大衍類」は剰余方程式９題からなっている。(注４)「大衍類」の９題はみな易、暦、測量などそれぞれに特色のある実際的な問題である。

最後の第９問 余米推数 「$x\equiv 1 \pmod{19}$、$x\equiv 14 \pmod{17}$、$x\equiv 1 \pmod{12}$」を除く８題はすべて逐約(互約)を必要とする問題で、それらの法modulusは「互いに素でない」だけでなく、分数や小数、或いは桁の大きな数など多岐に渡っている。

例えば、第５問 分糶推原(ぶんちょうすいげん)は、「甲、乙、丙の３人が収穫し、等分した穀物をそれぞれ異なる地方の斛(ます)を使って売った。甲は官斛(八斗三升入り)で売って三斗二升余し、乙は安吉斛(一石一斗入り)で売って七斗余し、丙は平江斛(一石三斗五升入り)で売って三斗余した。このとき、もとの穀物の量はいくらか」と問う問題である。

原文を合同式で表せば、

「$x\equiv 0.32 \pmod{0.83}$、$x\equiv 0.70 \pmod{1.10}$、$x\equiv 0.30 \pmod{1.35}$」 となる。

これを同値な合同式

「$x\equiv 32 \pmod{83}$、$x\equiv 70 \pmod{110}$、$x\equiv 30 \pmod{135}$」 と置き換えて解いている。

一方、『括要算法』(1712)以前の和算の世界では、『算法統宗』をもとにしたと云われる『塵劫記』(吉田光由 1627)等で「百五減算」は広く知られていた。

しかし、法が互いに素でない剰余方程式となると、星野実宣の『股勾弦鈔(ここうげんしょう)』(1672年)に１題「$x\equiv 5 \pmod{6}$、$x\equiv 7 \pmod{8}$、$x\equiv 5 \pmod{10}$」が紹介されているが、ここでは答95だけが書かれており解法は示されていない。(注５)

このような状況の中で関は「翦管術」としてそれぞれに特徴のある9題(内4題は互約、逐約を必要とする問題)を取り上げ、それらの明解な解法を示した。
その解法は、「互約・逐約」－「剰一術」－「翦管術」という系統立てられた、整然とした流れの中で述べられている。

これは正に秦九韶が『数書九章』で、「連環求等」－「大衍求一術」－「大衍総数術」と名付け用いた解法の流れと呼応するものである。更に術の実質的組立てに於いても、例えば関が「剰一術」で左右に拘泥するところなど、『数書九章』の「大衍総数術」でも全く同様の手続きで進められている。又、「翦管術」以外の分野、例えば高次方程式の解法、「ホーナー法」に於いても関の方法は『数書九章』と基本的に同じだと云える。(注6)

以上の点から関孝和は『数書九章』或いはその流れの書物を手にし、感化を受けていたのではないかという推論が得られる。それとも、時空の隔たりを超えた、数学的真理の必然的帰結であるのだろうか。

多くの著述によって関は『数書九章』を見ていない、従って剰一術及び翦管術の解法を示したのは関の独自の功績であるとされている。(注7)

例えば、『明治前日本数学史』(参考文献[B 2])巻1 P358 では法が互いに素でない問題を提示し「かかる場合を一般的に解いたのは関孝和である……」とあり、更に同書巻2 P172 には「中国にあっては宋の秦九韶が数書九章で大衍求一術なる名称の下に翦管術を一般的に論じている。しかし、この書は我国に入った形跡がないから、孝和の研究は独自のものである。」(注8)とある。しかし、「我国に入った形跡がない」ことから直ちに「実際に日本に伝来しなかった」と判断することは少なからず疑念の生ずるところである。

一方、会田安明(1747～1817)はその著書『豊島算経評林』の中で、関が中国より伝来の書物を見て、『括要算法』 を書き、自らの功績とし、もとの書物を焼き捨てたと伝えている。(注9)

事の真偽は定かではないが、会田の証言を否定する根拠として、例えば『関孝和』(参考文献[B 3]) P11 には「…この書(『楊輝算法』筆者注)こそ孝和が奈良で写し取ったものと断定されるが、孝和は楊輝算法を研究して、数字係数方程式の解法を完成した。孝和は写し取った本を焼き捨ててはいない。……孝和の学術を詳細に検討した結果、孝和には楊輝算法のほかには写し取るべき算書のなかったことをわれわれは断言できる」とある。

或いは、同書の P238 には関が影響を受けた中国の算書は「楊輝算法と算学啓蒙の二書でその他はほんの僅かに過ぎないことを知った」とあるが、関が他の算書を見なかったとする説得力のある論拠は示されていない。

関の写したものが基とされる『楊輝算法』が今日に残されていることは、関が他の算書を見ていない、或いは焼却していないということの根拠たり得ない。
更に、もし『数書九章』であれ、他の算書であれ、関が手にし、学習した後に故意或いは事故により焼失したとすれば、伝来した形跡が残っていないのは寧ろ自然なことである。

以上の考察によって、関が『数書九章』を見ていなかったと断定することには疑念を持つものである。

又、不定方程式を一般的に解いたことが、関の功績とされていることについても検証の必要があろう。何故なら、

1．法が互いに素でない問題を取り上げ互約、逐約することによる解法を示しているが、それはあくまで条件(５)の下での問題に限定されている。
関自身は条件(５)の仕組みをある程度認識していた上で敢えて条件(５)を満たす４題を取り上げたとも考えられる。しかし、条件(５)そのものには全く触れておらず、また条件(５)を満たさない場合についての言及もない。
2．去法を取り除くという点で法modulusで同じという意識が窺えるものの、最小の自然数だけを答としていること。(この点は、中国数学の流れの中にある和算の限界か)
3．少なくとも『括要算法』(1712)に先んずること450年以上の中国、南宋に於て秦九韶が、互約、逐約を必要とする剰余方程式を扱い、その解法を示している。しかも関の示した解法は『数書九章』と類似しており、秦のあげた９題の方が数値的にはるかに複雑なものであった。

以上３点によって、不定方程式を一般的に解いたことを関孝和の功績とすることにも疑義があると思われる。

§6．結び

関孝和が『数書九章』或いはその流れを汲む中国数学の何かを知り得ていたか否かは別として、たとえ関が『数書九章』を見知っていたとしても『数書九章』の「大衍総数術」と『括要算法』の「翦管術」は、解法こそ類似している点が多くあるが、それぞれの９題は実に趣きの異なるものとなっている。

『数書九章』は易、暦をはじめとした具体的、実際的な問題を例とし、その数値は極めて煩雑なものばかりである。

これに対して『括要算法』の９題はすべて完全に抽象化された問題であり、数値は『数書九章』と較べて平易なものばかりである。

しかし、『括要算法』では問題が一般化され、数値が単純、平易であるが故に、「剰一」や「翦管術」の本質が却って際立ち、明快に提示されていると云える。

このことこそ、関の数学的資質を物語っているものであろう。

「数学」の本質とも云える一般化する力、抽象化する感性を関は備えていた。これが関の心髄であり、この抽象性の純度の高さによってこそ、関は評価されるべきものである。

『数書九章』を見たか見ないか、何かを焼却したか否か、ということではなく、又、「不定方程式の一般解を確立した」という過大評価でもなく、関の生きたその時代背景の中にあって傑出した抽象数学の感性、資質を持った数学者として敬意を表したいと考えるものである。

注釈　([Ａ１]は参考文献の[Ａ１]を表す)

(注１)　[Ｂ３] p137
[Ｂ２] 第２巻 p146　他
ただし、p146に「刊行は正徳二壬辰年(西紀1702)」とある。
西紀1702は西紀1712の誤り。

（注２）　関孝和が『楊輝算法』を写本した年について。

「関孝和」の署名のある写本には奥付の記載の異なるものがある。藪内清氏所蔵であった写本には「寛文癸丑仲夏下浣日訂写訖」とあり、石黒文庫の流れのもの、例えば［Ａ３］などには「寛文辛丑仲夏下浣日訂写訖」とある。筆者も東京大学川原秀城氏の研究室で異なる２つの奥付を偶然目にすることができた。

この奥付の中の１文字「癸」と「辛」の違いは、寛文年間が寛文13年(癸丑、1673年)の９月21日に改元され延宝元年となったため、暦上は「寛文癸丑」はありえないものとの誤解から「寛文辛丑」(寛文元年、1661年)と書き換えられてしまったのではないかとの推察がある。［Ｂ６］ｐ202

仮に、関孝和の生年を1640年とすると、「寛文癸丑」であれば、関33才、「寛文辛丑」であれば関21才のときに『楊輝算法』を写本したことになる。

（注３）　［Ｃ１］p33～34
［Ｃ２］p133～137

（注４）　第３巻天時類に収められている１題「治歴演紀」も不定方程式の問題であるが、ここでは中国剰余定理を用いずに解いている。
［Ｃ４］p593（川原秀城）

（注５）　［Ｂ２］第１巻 p358
［Ｂ５］第１巻 $\boxed{1}$ p90

（注６）　［Ｂ７］p126

（注７）　［Ｂ２］第１巻 p358、第２巻 p7、p172
［Ｂ３］p176、［Ｃ３］ p891、他

（注８）　ここで「大衍求一術」を「翦管術」に対応する名称としているのは誤りである。秦の「大衍求一術」は関の「剰一術」に当たる用語であり、「翦管術」に対応する『数書九章』での用語は「大衍総数術」である。

（注９）　［Ｂ３］ｐ９

参考文献

Ａ．中国数学史

原典　［Ａ１］　著者不詳『孫子算経』(中国科学技術典籍通彙 數學巻)
［Ａ２］　秦九韶『数書九章』（中国科学技術典籍通彙 數學巻）
秦九韶『数学九章』（欽定四庫全書）
［Ａ３］　楊輝　『楊輝算法』（中国科学技術典籍通彙 數學巻）
［Ａ４］　程大位『算法統宗』（中国科学技術典籍通彙 數學巻）

著述 ［Ａ５］ 薮内清『中国の数学』（岩波新書 1974）

［Ａ６］ 沈康身「秦九韶の大衍総数術と関孝和の諸約術」
（日本数学史学会 『数学史研究』通巻109号所収 1986）

［Ａ７］ 銭宝琮『中国数学史』（川原秀城訳、みすず書房 1990）

［Ａ８］ Jean-Claude Martzloff『A History of Chinese Mathmatics』
（Springer-Verlay 1997）

B．和算

原典 ［Ｂ１］ 平山諦、下平和夫、広瀬秀雄編『関孝和全集』（大阪教育図書 1974）

著述 ［Ｂ２］ 日本学士院編 藤原松三郎『明治前日本数学史』第1巻、第2巻、第3巻
（岩波書店 1954、1956、1957）

［Ｂ３］ 平山諦『関孝和』（恒星社厚生閣 1959）

［Ｂ４］ 平山諦『東西数学物語』（恒星社厚生閣 1973）

［Ｂ５］ 下平和夫『江戸初期和算選書』第１巻（研成社 1990）

［Ｂ６］ 平山諦『和算の誕生』（恒星社厚生閣 1993）

［Ｂ７］ 王 青翔 『「算木」を超えた男』（東洋書店 1999）

C．整数論、その他

［Ｃ１］ 高木貞治『初等整数論講義』（共立出版 1931）

［Ｃ２］ 遠山啓『初等整数論』（日本評論社 1972）

［Ｃ３］ 寺阪英考編『現代数学小辞典』（講談社 1977）

［Ｃ４］ 伊東俊太郎編 『数学の歴史Ⅱ 中世の数学』 （共立出版 1987）